1. Espace de probabilité

1.1. Exercice. Soient A, B et C trois événements liés à la même expérience. Donner en fonction de A, B et C les expressions des événements suivants :
(i) seulement A est réalisé ;
(ii) A et B sont réalisés mais pas C ;
(iii) au moins deux des trois événements sont réalisés ;
(iv) deux au plus des trois événements sont réalisés ;
(v) au plus un des trois événements est réalisé.

1.2. Exercice. Soit P la probabilité sur $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ telle que

$$P(\{k\}) = \alpha(2k-1) \quad \text{pour tout } k \in \Omega$$

où α est une constante.

(a) Calculer α.
(b) Calculer la probabilité de l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

1.3. Exercice. On lance deux dés distinguables (un bleu et un rouge) bien équilibrés. Soient les événements suivants :
$A =$"La somme vaut 6";
$B =$ "La somme est un multiple de 3";
$C =$ "La somme est paire".

Quel est le modèle probabiliste associé à cette expérience ? Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ et $P(A \cap B \cap C)$.

1.4. Exercice. Soit P et Q deux probabilités sur un espace Ω. On suppose que pour tout événement $A \subset \Omega$ on a $P(A) \leq Q(A)$.
Montrer que P et Q sont égales.

1.5. Exercice. On joue 4 fois à pile ou face. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 faces ou 3 piles consécutivement ?

1.6. Exercice. Soit A et B deux événements. Montrer que

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

Démontrer l'inégalité

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

1.7. Exercice. Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements. Montrer l'inégalité

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

1.8. Exercice. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'événements. Montrer que

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c, \quad \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c .$$

1.9. Exercice. Soit P_1 et P_2 deux probabilités sur un espace Ω. On définit l'application Q sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$Q(A) = \frac{1}{3}P_1(A) + \frac{2}{3}P_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Montrer que Q est une probabilité sur Ω.

1.10. Exercice.

(a) Si A, B, C sont trois événements montrer que

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = &P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(b) On lance au hasard r balles dans 3 paniers. Quelle est la probabilité qu'un des paniers soit vide ?

1.11. Exercice.

(a) On vous propose le jeu suivant :
Une urne noire contient 5 boules rouges et 6 boules vertes, une urne blanche contient 3 boules rouges et 4 boules vertes. Vous pouvez choisir une urne et ensuite tire une boule au hasard de cette urne. Si vous obtenez une boule rouge, vous gagnez un prix. Quelle urne devez-vous choisir ?

(b) On vous propose le même jeu avec une seconde urne noire qui contient 6 boules rouges et 3 vertes, et une seconde urne blanche contenant 9 boules rouges et 5 vertes.
Quelle urne devez-vous choisir ?

(c) Dans le jeu final, le contenu de la seconde urne noire est déposé dans la première urne noire et le contenu de la seconde urne blanche dans la première urne blanche. De nouveau vous pouvez choisir dans quelle urne tirer une boule. Laquelle devez-vous choisir ?

1.12. Exercice. Dans un jeu télévisé, le joueur choisit tout d'abord une porte parmi trois. Derrière deux des portes se trouve une chèvre et derrière la troisième se trouve une voiture à gagner. Le présentateur ouvre une des deux portes que le joueur n'a pas choisies et derrière laquelle se trouve une chèvre. A ce stade, le joueur doit faire un choix entre les deux portes restées fermées (et gagne s'il choisit la bonne porte). Quel est le meilleur choix pour le joueur ?

1.13. Exercice. Dans une pièce se trouve n personnes. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$; quelle est la probabilité que la i-ème personne ait le même anniversaire qu'une des autres personnes ? (on considérera pour simplifier qu'il n'y a pas d'année bissextile).

Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient le même anniversaire ?

1.14. Exercice. Un jeu de 52 cartes est mélangé.

(a) Quelle est la probabilité que les quatre as se retrouvent à la suite dans le paquet ?
(b) Quelle est la probabilité que parmi les 3 premières cartes se trouve au moins une figure (valet, dame ou roi) ?

1.15. Exercice. Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire au hasard successivement 3 boules sans remise.

(a) Définir un espace de probabilité (Ω, P) correspondant à cette expérience.
(b) Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
(c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au 2ème tirage ?

1.16. Exercice. On dispose au hasard $n = 20$ livres sur une étagère rectiligne. Trois de ces livres sont d'un même auteur A et les autres livres sont tous d'auteurs différents.

(a) Donner un espace de probabilité (Ω, P) correspondant à cette expérience.
(b) Calculer la probabilité que les 3 livres de l'auteur A soient côte à côte.

1.17. Exercice. Soient quatre joueurs de bridge désignés par Nord, Sud, Ouest et Est. On définit les événements $N :=$ "Nord a au moins un as", $S :=$ "Sud a au moins un as", etc. Rappelons que, au bridge, 52 cartes sont réparties entre les 4 joueurs.

(a) A quelle configuration de jeu correspond $N \cap S \cap O \cap E$?
(b) Exprimer à l'aide de N, S, O, E les événements "Nord a 4 as", "Un joueur a 4 as", "Un joueur n'a pas d'as".
(c) Calculer la probabilité des événements décrits en a) et b).

2. Variable aléatoire

2.1. Exercice. Au Tapis vert, chaque joueur doit cocher une carte et une seule dans chacune des couleurs (trèfle, carreau, coeur, pique) d'un jeu de 32 cartes. La mise initiale est de 1 euro. Chaque soir 4 cartes sont tirées au sort (une par couleur).

(a) Proposer un modèle probabiliste de l'épreuve aléatoire.

(b) Soit $X : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \{0,1,2,3,4\} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = \text{ nombre de cartes conformes au tirage.} \end{array}$
Quelle est la loi de X ?

(c) Si $X = 4$ le joueur touche 1000 fois sa mise, si $X = 3$, 20 fois, si $X = 2$, 2 fois et sinon, il perd sa mise. Soit $Y : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & Y(\omega) = \text{ gain net du joueur = gain} - \text{mise.} \end{array}$
Calculer l'espérance mathématique de Y et sa variance.

2.2. Exercice. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles.

(a) Montrer que $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
(b) Montrer que $(E(X))^2 \leq E(X^2)$.
(c) Montrer que la fonction $f(a) = E[(X - a)^2]$ atteint son minimum au point $a = E[X]$.

2.3. Exercice. On considère n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ où n est un entier. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité (Ω, P) satisfaisant :

$$P(Y = x_i) = 1/n \quad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(a) Exprimer $E(Y)$ en fonction de n et des x_i, $1 \leq i \leq n$.
(b) Exprimer $Var(Y)$ en fonction de n et des x_i, $1 \leq i \leq n$.

2.4. Exercice. On jette deux fois un dé. Soit X le résultat du premier lancer et soit Y le résultat du second.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
(b) Soit $D = X - Y$. Déterminer la loi de D.
(c) Calculer $E(|D|)$.
(d) Montrer que $\max(X, Y) = \frac{1}{2}\big(X + Y + |X - Y|\big)$. En déduire $E[\max(X, Y)]$.
(e) Calculer $E[\min(X, Y)]$.

2.5. Exercice.

(a) Si X une variable aléatoire positive telle que $E(X) = 0$, montrer que $P(X = 0) = 1$.
(b) Si X est une variable aléatoire réelle telle que $Var(X) = 0$ montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $P(X = c) = 1$.

2.6. Exercice. Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort, sinon il perd sa mise. Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort. Il est interdit de miser sur le zéro.

(a) Un joueur mise a euros sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de C puis calculez $E(C)$ et $Var(C)$.
(b) Un joueur mise a euros sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de N puis calculez $E(N)$ et $Var(N)$.
(c) Calculer la covariance $Cov(C, N)$.

2.7. Exercice. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles définies sur le même espace de probabilité.

(a) Montrer que la fonction $f : a \mapsto E[(Y - aX)^2]$ est un polynôme de degré 2.
(b) Montrer que $f \geq 0$. En déduire que

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)\, E(Y^2).$$

(c) Montrer que

$$\sqrt{E[(X+Y)^2]} \leq \sqrt{E[X^2]} + \sqrt{E[Y^2]}.$$

2.8. Exercice. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité (Ω, P) à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 0, 1, 2\}$, et telle que

$$P(X = 0) = \frac{3}{16}, \quad P(X = 1) = \frac{5}{16}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

(a) Calculer $P(X = -1)$.
(b) Déterminer l'espérance de X.
(c) Calculer la variance de X.
(d) Calculer $E\big(X^3\big)$.
(e) On pose $Y = 1_{\{X \leq 0\}}$. Calculer la covariance de X et Y.

2.9. Exercice. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$

(a) Calculer $P(X = j)/P(X = j - 1)$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.
(b) Pour quelle valeur de j la probabilité $P(X = j)$ est la plus grande ?

2.10. Exercice. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace Ω. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$P(X + Y \geq t) \leq P(X \geq t/2) + P(Y \geq t/2).$$

2.11. Exercice. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ soit l'application

$$1_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Montrer que: $A \subset B \iff 1_A \leq 1_B$.
(b) Exprimer $1_{A\cup B}$, $1_{A\cap B}$, 1_{A^c} et $1_{A\cup B}$ en fonction de 1_A et 1_B.
(c) Exprimer $1_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ en fonction des 1_{A_i}, $1 \leq i \leq n$.
(d) Soit $S = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$. Exprimer à l'aide de S les événements $\bigcup_{i=1}^n A_i$ et $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

2.12. Exercice. On veut contrôler la qualité d'un lot de N objets. Pour cela n objets sont tirés au hasard successivement et sans remise dans le lot ($1 \leq n \leq N$), et examinés. On observe donc le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ où $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème objet est défecteux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
On note k le nombre (inconnu) d'objets défectueux dans le lot.

(a) Chercher la loi de X_i. Calculer $E(X_i)$ et $Var(X_i)$.
(b) Si $i \neq j$, calculer $Cov(X_i, X_j)$.
(c) On pose $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S ? Donner sa loi. Calculer $E(S)$ et $Var(S)$.
(d) On note $p = k/N$ la proportion d'objets défectueux dans le lot. Montrer que

$$P\Big(\big|\frac{S}{n} - p\big| \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}\Big) \geq 0,95.$$

2.13. Exercice. Une urne contient n boules blanches et n boules noires que l'on tire une par une (sans replacement). Soit X la variable aléatoire indiquant le rang du tirage où apparaît la dernière boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de X.

2.14. Exercice. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles telle que $E(X) = 0$. On note $v = Var(X)$.

(a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, exprimer $E\big((X+\lambda)^2\big)$ en fonction de λ et v.
(b) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$P\big(X \geq \varepsilon\big) \leq P\big(|X+\lambda| \geq \varepsilon + \lambda\big) \leq \frac{v + \lambda^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2 + 2\lambda\varepsilon}.$$

(c) En déduire que pour tout $\varepsilon \geq 0$ on a

$$P\big(X \geq \varepsilon\big) \leq \frac{v}{\varepsilon^2 + v}.$$

2.15. Exercice. Un tiroir contient d paires de chaussettes (d est un entier plus grand que 1). Parmi ces $2d$ chaussettes on en choisit n au hasard que l'on retire du tiroir. Soit S le nombre de paires qui restent dans le tiroir. Calculer l'espérance de S.
Indication : on pourra exprimer S en fonction des X_i, $1 \leq i \leq d$, où

$$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si la i-ème paire est encore dans le tiroir} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

3. Événements indépendants – Probabilité conditionnelle

3.1. Exercice. Une pièce est jetée deux fois. On considère les événements

$$A = \text{“pile au premier coup”}$$

$$B = \text{“pile au second coup”}$$

$$C = \text{“on obtient exactement une fois pile”}$$

(a) Montrer que A est indépendant de B, A est indépendant de C et que B est indépendant de C.

(b) Est-ce que les événements A, B, C sont indépendants ?

3.2. Exercice. Montrer que si $A \cup B = \Omega$ alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(A^c)P(B^c).$$

3.3. Exercice. Montrer que si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B ne peuvent pas être indépendants sauf si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

3.4. Exercice.

(a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $1 - u \leq e^{-u}$.

(b) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun de ces événements ne soit réalisé est plus petite que $\exp\big(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\big)$.

3.5. Exercice. Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$. Montrer que

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \leq P(A \cap B \mid A).$$

3.6. Exercice. Soit A et B deux événements indépendants et tels que $P(A \cup B) > 0$. Montrer que

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \leq P(A).$$

3.7. Exercice. Une compagnie d'assurance automobile assure le même nombre d'hommes et de femmes. Au cours d'une année la probabilité qu'un homme ait un accident est α, indépendamment des autres conducteurs. La probabilité analogue pour les femmes est β. Supposons que la compagnie choisisse un conducteur au hasard.

(a) Quelle est la probabilité que ce conducteur ait un accident cette année ?

(b) Quelles est la probabilité que ce conducteur ait un accident pendants deux années consécutives ?

(c) Soit A_1 l'événement “le conducteur a un accident cette année” et soit A_2 l'événement “le conducteur a un accident l'année prochaine”. Montrer que $P(A_2 \mid A_1) \geq P(A_1)$.

3.8. Exercice. Le roi répartit 24 boules dans 3 urnes : 2 boules rouges et 6 blanches dans l'urne A, 5 rouges et 3 blanches dans l'urne B, 6 rouges et 2 blanches dans l'urne C.

(a) Un condamné à mort choisi l'une des urnes et en extrait une boule (tout au hasard). Si elle est blanche, il sera gracié. Quelle est sa chance de survie ?

(b) Sur l'intervention de sa fille, le roi, magnanime, donne au condamné le droit de répartir à sa guise les 24 boules dans les 3 urnes. Quelle est la meilleure combinaison pour le condamné ?

3.9. Exercice. Une urne I contient 2 boules blanches et 4 boules rouges. Une urne II contient 1 boule blanche et 1 boule rouge.

On tire au hasard une boule de l'urne I et on la place dans l'urne II. Puis on tire au hasard une boule dans l'urne II. Calculer

a) La probabilité que la deuxième soit blanche.

b) La probabilité que la boule transférée soit blanche, sachant que la deuxième est blanche.

c) Définir un espace de probabilité modélisant cette expérience.

3.10. Exercice. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. Une boule est tirée au hasard: puis on la replace dans l'urne en ajoutant d boules de la même couleur. Calculer

a) La probabilité que la deuxième tirée soit rouge.

b) La probabilité que la première soit rouge, sachant que la deuxième tirée est rouge.

3.11. Exercice. On suppose que la probabilité qu'un réacteur d'avion tombe en panne en cours de vol est $1 - p$, où $0 < p < 1$, et ceci, indépendamment du comportement des autres moteurs de l'appareil.

On suppose qu'un avion peut encore voler si la moitié de ses moteurs fonctionnent. Vaut-il mieux voler en bimoteur ou en quadrimoteur ?

3.12. Exercice. Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des souris malades. Des essais prouvent que:

- 96 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand la souris est effectivement malade.
- 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand la souris n'est pas malade.

Dans une population de souris comprenant 3 % de malades, on pratique le test sur une souris choisie au hasard et on constate que le test donne un résultat positif. Quelle est la probabilité que la souris soit malade? Commenter le résultat obtenu.

3.13. Exercice. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune des boules blanches et des boules noires, dans les proportions p_1 et q_1 pour U_1 et p_2 et q_2 pour U_2. Après chaque tirage dans chaque urne la boule tirée est remise. Les tirages sont fait selon la règle suivante: on choisit au hasard l'une des deux urnes pour le premier tirage; ensuite on tire dans U_1 si la première boule tirée est blanche, dans U_2 si la première boule tirée est noire; de même la n-ième boule est tirée dans U_1 si la $(n-1)$-ième boule tirée est blanche, dans U_2 si elle est noire.

(a) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au premier coup? au second? au troisième?

(b) Soit π_n la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième coup. Trouver une relation entre π_n et π_{n-1}.

(c) Montrer que π_n tend vers une limite lorsque $n \to \infty$ et la calculer.

3.14. Exercice. On dispose de deux dés A et B, où A a quatre faces rouges et 2 faces blanches, et B a deux faces rouges et 4 faces blanches. On tire à pile ou face. Si pile sort, on joue avec le dé A, sinon, on joue avec le dé B. Calculer

a) La probabilité pour que la face rouge apparaisse.

b) La probabilité pour que la troisième face soit rouge, sachant que les première et deuxième faces sont rouges.

c) La probabilité pour que le dé utilisé soit A, sachant que les première et deuxième faces sont rouges.

3.15. Exercice. Une urne contient 30 jetons numérotés de 1 à 30. On tire au hasard un jeton. Soit les événements

$$A = \text{“on obtient un multiple de 2”}$$

$$B = \text{“on obtient un multiple de 3”}$$

$$C = \text{“on obtient un multiple de 5”}$$

Les événements A,B,C sont-ils indépendants ?

3.16. Exercice. 3 commodes ont chacune 2 tiroirs, chaque tiroir contenant une pièce. La première commode contient deux pièces d'or, la deuxième une pièce d'or et une pièce d'argent, la troisième deux pièces d'argent. On choisit au hasard une commode et on ouvre l'un des tiroirs. Si le tiroir contient une pièce d'or, quelle est la probabilité que l'autre contienne aussi une pièce d'or ?

4. Variables aléatoires indépendantes

4.1. Exercice. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles telle pour tout $A \subset \mathbb{R}$ on a

$$P(X \in A) = P(-X \in A).$$

On suppose de plus que $P(X = 0) = 0$.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $1_{\{X>0\}}$?
(b) Montrer que $|X|$ et $1_{\{X>0\}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

4.2. Exercice. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que X est indépendante d'elle-même. Montrer qu'il existe une constante $x \in \mathbb{R}$ telle $P(X = x) = 1$. Indication : on pourra montrer que $Var(X) = 0$.

4.3. Exercice. On lance deux fois le même dé qui n'est pas supposé parfaitement symétrique. Montrer que la probabilité d'obtenir un double est d'au moins $1/6$.

4.4. Exercice. Soit $X : \Omega \to \mathcal{X}$ et $Y : \Omega \to \mathcal{Y}$ deux variables aléatoires définies sur une espace de probabilité (Ω, P) ($\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux ensembles quelconques).

(a) Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{X}$ tel que $P(X = x) > 0$ on a pour tout $y \in \mathcal{Y}$:

$$P\big(\{Y = y\} \mid \{X = x\}\big) = P(Y = y).$$

(b) On se place dans le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{N}$. On suppose que

$$P\big(\{Y = y\} \mid \{X = x\}\big) = \frac{1}{x+1}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $y \leq x$. Exprimez $E(Y)$ en fonction de $E(X)$.

(c) On suppose de plus qu'il existe une entier n tel que

$$P(X = x) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}(x+1) \quad \text{pour tout } x \in \{0, \dots, n\}.$$

Montrer que $P(X = x) = 0$ si $x > n$.
Montrer que X et $n - Y$ ont la même loi.

4.5. Exercice. [Théorème des événements rares de Poisson] On considère une masse donnée d'uranium 238 comprenant des milliards d'atomes (n) et on cherche à calculer la loi du nombre S_n de noyaux d'hélium (rayonnement α) émis pendant un certain laps de temps que l'on prend assez court. On peut alors supposer que chaque noyau émet indépendamment des autres et que pendant ce laps de temps soit il n'émet rien avec une probabilité $1 - p_n$ soit il émet un noyau avec la probabilité p_n.

(a) Quelle est la loi de S_n? Que vaut sa moyenne?
(b) Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que $E[S_n]$ converge et notons $\lambda = \lim_{n\to\infty} E[S_n]$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

4.6. Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et soi $U_1, U_2, \dots, U_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité et à valeurs dans $\{0, 1, \dots, 9\}$. On suppose que $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, 9\}$. On pose

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{10^i}.$$

(a) Déterminer la loi de X_n.
(b) Montrer que pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue on a

$$\lim_{n\to\infty} E[h(X_n)] = \int_0^1 h(x)dx.$$

4.7. Exercice. Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \dots, p\}$.

(a) Trouver la loi de $M_n = \max_{1\le k\le n} U_k$.
(b) Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} E(M_n) = \frac{n}{n+1}.$$

4.8. Exercice. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$, et telles que

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = 1/2.$$

On pose $Z = XY$.

(a) Déterminer la loi de Z.
(b) Montrer que X et Z sont indépendantes, et que Y et Z sont indépendantes.
(c) Les variables aléatoires X, Y, Z sont-elles indépendantes ?

4.9. Exercice. Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes et de même loi. On pose $\mu = E(X_1)$ et $v = Var(X_1)$. On définit les variables aléatoires

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

appelées respectivement moyenne empirique et variance empirique.

(a) Calculer $E(\bar{X})$.
(b) Montrer que si $i \neq j$ on a $Cov(X_i, X_j) = 0$. En déduire une expression simple de $Var(\bar{X})$.
(c) Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = V + (\bar{X} - \mu)^2.$$

(d) Calculer $E(V)$. En déduire l'espérance de $\widetilde{V}$ où

$$\widetilde{V} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{(appelée variance empirique modifiée.)}$$