Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence de Physique, L2

Cours de Mathématiques-MP4
2011-2012, 2^{nd} semestre

Correction du test 3

Exercice 1 :
E est l'ensemble des polynômes de degré inférieur à 4 qui ont 0 pour racine double, c'est donc l'espace engendré par X^2, X^3. On orthonormalise cette base :

$$\phi(X^2, X^2) = \int_0^1 t^4 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{5}.$$

On pose donc $e_1 = \sqrt{5}X^2$.

On a ensuite :

$$\phi(e_1, X^3) = \sqrt{5}\int_0^1 t^5 \, \mathrm{d}t = \sqrt{5}\frac{1}{6},$$

et

$$X^3 - \phi(e_1, X^3)e_1 = X^3 - \frac{5}{6}X^2,$$

$$\|X^3 - \frac{5}{6}X^2\|^2 = \phi(X^3 - \frac{5}{6}X^2, X^3 - \frac{5}{6}X^2) = \int_0^1 (t^3 - \frac{5}{6}t^2)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{252} = \frac{1}{7 \times 6^2}.$$

On pose donc $e_2 = \sqrt{7}(6X^3 - 5X^2)$.

La base e_1, e_2 est donc une base orthonormale de E.

La projection orthogonale de $X^2 - 1$ sur E est donc :

$$p_E(X^2-1) = \phi(e_1, X^2-1)e_1 + \phi(e_2, X^2-1)e_2 = 5 * \phi(X^2, X^2-1)X^2 + 7\phi(6X^3-5X^2, X^2-1)(6X^3-5X^2),$$

où

$$\phi(X^2, X^2 - 1) = \int_0^1 t^2(t^2 - 1) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15},$$

$$\phi(6X^3 - 5X^2, X^2 - 1) = \int_0^1 t^2(6t - 5)(t^2 - 1) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{6},$$

donc

$$p_E(X^2 - 1) = 5 * \frac{-2}{15}X^2 + \frac{7}{6}(6X^3 - 5X^2) = -\frac{2}{3}X^2 + \frac{7}{6}(6X^3 - 5X^2)$$

Exercice 2 :
Quel que soit le paramètre x, la matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable. Elle est de rang 2, donc 0 est valeur propre de la matrice avec multiplicité $4-2 = 2$. Les deux autres valeurs propres sont données par le polynôme caractéristique :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_4\right) = \lambda^2(\lambda^2 - 1 - x\lambda),$$

qui a pour racines autres que 0 : $\lambda_\pm = \frac{x \pm \sqrt{x^2+4}}{2}$ (et la somme des valeurs propres est bien égale à la trace de la matrice, à savoir x). On a donc une valeur propre double 0 et deux valeurs propres simples $\lambda_\pm$.

Exercice 3 :
On fait le changement de variables en polaire dans l'intégrale :

$$\iint\limits_{\mathscr{C}_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_{r=0}^{R} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^R = \pi(1-e^{-R^2}).$$

Le carré Q_{2R} centré en 0 et de côté $2R$ est inclus dans le cercle $\mathscr{C}_{\sqrt{2}R}$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}R$, et contient le cercle C_R de centre 0 et de rayon R (faire un dessin !).

Donc comme on intègre une fonction positive, on a pour tout R :

$$\iint\limits_{C_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{Q_{2R}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Or,

$$\iint\limits_{Q_{2R}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=-R}^{R}\int_{y=-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\int_{t=-R}^{R} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

Donc

$$\sqrt{\pi(1-e^{-R^2})} \leqslant \int_{t=-R}^{R} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\pi(1-e^{-2R^2})}$$

Par théorème des gendarmes, la quantité au milieu converge vers $\sqrt{\pi}$ quand R tend vers $+\infty$.