Correction du test 1

Exercice 1 :
Donner en justifiant la nature (convergente ou divergente) des intégrales :

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
   Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \arctan(t)$, dont les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.Donc $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'intégrale π).
2. $$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$
   Une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de limite 0 en 0. Donc ln est intégrable sur $]0,1]$ (d'intégrale -1).
3. $$\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Une primitive de cos sur $\mathbb{R}_+$ est sin, qui n'a pas de limite en $+\infty$. Donc cos n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
4. $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
   (Inutile d'espérer avoir une primitive de cette fonction !). L'application $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il faut étudier la fonction au voisinage de 0 et $+\infty$ pour voir si elle est intégrable.

   en 0 : On a $e^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$. Donc $f \sim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}}$, dont on sait qu'elle est intégrable au voisinage de 0 (disons sur $]0,1]$, par exemple une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est $t \mapsto 2\sqrt{t}$ qui a une limite finie en 0). Donc f est intégrable sur $]0,1]$

   en $+\infty$: Sur $[1,+\infty[$, on a $\frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant 1$, donc $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leqslant e^{-t}$, dont on sait qu'elle est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc f est aussi intégrable sur $[1,+\infty[$, et donc sur $]0,+\infty[$

Exercice 2 :
Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^1 \ln(1+xe^t)\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que F est dérivable sur* $[0,+\infty[$.
   On note f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \ln(1+xe^t) \end{array}$$

   Alors :

- f est intégrable par rapport à t pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- f est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in [0,1]$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$,

  $$|\partial_x f(x,t)| = \left| \frac{e^t}{1+xe^t} \right| \leqslant e^t,$$

  qui est intégrable sur $[0,1]$.

Donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{1+xe^t}\,\mathrm{d}t.$$

2. *Donner une expression sans intégrale de $F'(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.*
   On a, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$F'(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{1+xe^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{xe^t}{1+xe^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\ln(1+xe^t)\right]_0^1 = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+xe}{1+x}\right)$$

   et

   $$F'(0) = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e-1$$