

Durée : 2 heures. Ni les documents ni les téléphones ne sont autorisés

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité (Ω, P) à valeurs dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, et telle que

$$P(X = -2) = \frac{4}{16}, \quad P(X = -1) = \frac{3}{16}, \quad P(X = 1) = \frac{5}{16}, \quad P(X = 2) = \frac{2}{16}.$$

- (1) Calculer $P(X = 0)$.
- (2) Déterminer l'espérance de X .
- (3) Calculer la variance de X .
- (4) Calculer $E(X^3)$.
- (5) On pose $Y = 1_{\{X \leq 0\}}$. Calculer la covariance de X et Y .

Exercice 2. Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des singes résistant à un virus.

Des essais prouvent que:

- 95 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand le singe est effectivement résistant au virus.
- 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand le singe n'est pas résistant au virus.

Dans une population de singes comprenant 5 % de singes résistants, on pratique le test sur un singe choisi au hasard et on constate que le test donne un résultat positif. Quelle est la probabilité que ce singe soit résistant au virus ?

Exercice 3. Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire au hasard successivement 3 boules sans remise.

- (1) Définir un espace de probabilité (Ω, P) correspondant à cette expérience.
- (2) Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
- (3) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au 2ème tirage ?

Exercice 4. On joue 6 fois à pile ou face.

- (1) Proposer un modèle probabiliste (Ω, P) de cette expérience.
- (2) Soit A l'événement "On n'obtient aucun pile". Expliciter A et calculer $P(A)$.
- (3) Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles suivis de deux faces pendant la partie ?
- (4) Un joueur mise 5 euros sur pile ou face. Si le tirage donne six fois son choix, il gagne trois fois sa mise. S'il y en a quatre ou cinq, il ne gagne que deux fois sa mise. Sinon il perd sa mise. On note X la variable aléatoire donnant le gain à la fin de la partie.
 - (a) Quelle est l'espérance de X ? À quoi correspond-elle ?
 - (b) Calculer la variance de X .

Exercice 5. On tire au hasard successivement, et sans remise, tous les jetons d'un sac contenant 6 jetons numérotés de 1 à 6. Pour $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ on note X_i le i -ème numéro obtenu.

Déterminer la loi de X_i pour $i \in \{1, \dots, 6\}$.