

Test 2, durée 30 min.

Les calculatrices, documents, et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 :

Énoncer le théorème de Fubini pour les intégrales multiples sur une partie quarrable de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 :

Donner la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0; \pi]$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$.
4. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Montrer que u_n a le signe de $(-1)^n$ et que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

5. En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

converge quand même.