Feuille de TD 5

Calcul d'intégrales multiples

Exercice 1 :

Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=R^2$, où a, b et R sont des réels strictements positifs. On effectuera d'abord le calcul en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires.

Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'hyperboloïde à une nappe $\mathscr{H}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=R^2$, où a, b, c et R sont des réels strictements positifs. Calculer le volume intérieur à $\mathscr{H}$ et délimité par les plans d'équations $z=\alpha$ et $z=\beta$, pour $\alpha>\beta$.

Exercice 3 :

Soit $\mathscr{S}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

1. Représenter $\mathscr{S}$ par un dessin.
2. Calculer $\iint_{\mathscr{S}}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$

Exercice 4 :

Soit $\mathscr{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\,;\,x\geqslant 0\,;\,y\geqslant 0\}$. Calculer $\iiint_{\mathscr{D}} xdxdydz$.

Exercice 5 :

Soit $\mathscr{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$. Calculer $\iiint_{\mathscr{S}}(x+y+z)^2dxdydz$.

Exercice 6 :

1. Soit $\mathscr{C}_R$ le disque de rayon R centré en l'origine du plan. Calculer $\iint_{\mathscr{C}_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-t^2}dt$.

Exercice 7 :

Soit $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi^2<x^2+y^2\leqslant 4\pi^2\}$. Calculer $\iint_{\mathscr{D}}\sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$.

Exercice 8 :

Soit $h>0$ et $\mathscr{C}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant y\,;0\leqslant z\leqslant h\}$. Calculer $\iiint_{\mathscr{C}}\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdydz$.

Exercice 9 :

Soient des réels a, b, c et d tels que $0<a\leqslant b$ et $0<c\leqslant d$. On considère $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2\leqslant y\leqslant bx^2\,;\,\frac{c}{x}\leqslant y\leqslant\frac{d}{x}\}$. Calculer le volume de $\mathscr{D}$ via le changement de variable $(u,v)=(\frac{y}{x^2},xy)$.

Exercice 10 :

1. Montrer que si $\mathscr{R}$ est un rectangle du plan dont l'un des cotés est parallèle à l'axe (Ox), l'intégrale $\iint_{\mathscr{R}} e^{2i\pi(x+y)}dxdy$ est nulle si et seulement si l'un des cotés de $\mathscr{R}$ est de longueur entière.
2. Déterminer pour $\alpha\in\,]0,\pi[$ une fonction $f_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ qui a la propriété suivante : pour tout rectangle du plan $\mathscr{R}_\alpha$ dont l'un des cotés forme un angle α avec l'axe (Ox), l'intégrale $\iint_{\mathscr{R}_\alpha} f_\alpha(x,y)dxdy$ est nulle si et seulement si l'un des cotés de $\mathscr{R}_\alpha$ est de longueur entière.

3. Montrer que l'on peut partitionner un rectangle du plan en rectangles possédant chacun un coté de longueur entière si et seulement si ce rectangle possède lui-même un coté de longueur entière.

Exercice 11 :
Soit $\mathscr{T}_{a,R}$ le tore plein, qui est l'ensemble engendré dans $\mathbb{R}^3$ par la rotation autour de l'axe (Oz) du disque d'équation $(x-a)^2+z^2 \leqslant R^2$, avec $a > R$. Calculer le volume de $\mathscr{T}_{a,R}$ (on ne cherchera pas une équation du tore, mais on choisira d'emblée un paramétrage *ad hoc*).

Exercice 12 :
Calculer l'intégrale de f sur $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants :
- $\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\,;\, 0 \leqslant z \leqslant h\}$ avec $h > 0$ et $f(x,y,z) = z$.
- $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant R^2\}$ et $f(x,y) = x^2+y^2$.
- $\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$ avec $a > 0$ et $f(x,y,z) = z\cos(x^2+y^2)$.
- $\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\,;\, x^2+y^2 \leqslant z^2\,;\, 0 < z\}$ et $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{z}$.
- $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\,;\, x \geqslant 0\,;\, y \geqslant 0\,;\, y \leqslant x\}$ et $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$.
- $\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leqslant 1\,;\, x > 0\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}$ et $f(x,y,z) = xyz$, puis $f(x,y,z) = \frac{1}{(1+y+z)^2}$. Dans les deux cas, on posera $(u,v,w) = (x+y+z, \frac{y+z}{x+y+z}, \frac{z}{y+z})$.

Exercice 13 :
Soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x\,;\, y \geqslant 0\}$.
1. Représenter $\mathscr{D}$ par un dessin.
2. Calculer en coordonnées polaires $\iint_{\mathscr{D}} (x+y)^2 dxdy$.

Exercice 14 :
Soient $\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ et
$\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant z^2\}$.
1. Représenter $\mathscr{S}$ et $\mathscr{C}$ par un dessin.
2. Calculer en coordonnées sphériques le volume de $\mathscr{S} \cap \mathscr{C}$.