Feuille de TD 4

Calcul d'Intégrales Doubles et Triples

Exercice 1 :

Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 \leqslant y \leqslant 1 + \frac{x^2}{2}\}$. Montrer que D est un domaine quarrable.

Calculer

$$I := \iint_D (x^2 + x + 3)\, dx\, dy.$$

Exercice 2 :

Soit D la partie de $\mathbb{R}^2$ comprise entre l'axe des x, la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = 2 - x$. Montrer que D est un domaine quarrable.

Calculer

$$I := \iint_D y\, dx\, dy.$$

Exercice 3 :

Soit D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

1. Calculer (directement) $I := \iint_D (x - y)\, dx\, dy$.
2. Calculer I au moyen du changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 4 :

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

dans les deux cas suivants :

1. D est défini par $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$.
2. D est défini par $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Dans le deuxième cas, on vérifiera la formule de Fubini i.e. qu'intégrer suivant la variable x puis y donne le même résultat que si on intégre d'abord suivant la variable y puis x. [1]

1. Résulat du 2. : $\frac{2\sqrt{2} - 1}{30\sqrt{2}}$.

Exercice 5 (Calculer les intégrales) :

$$I_1 = \iint_{D_1} (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x,y \geqslant 0\,;\, x+y\leqslant 1\}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x^2+y^2 < x\,;\, y < x^2+y^2\}.$$

$$I_3 = \iint_{D_3} \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_3 = \{(x,y)\in[0,1]^2 \mid\ x^2+y^2 \geqslant 1\}.$$

$$I_4 = \iint_{D_4} \frac{1}{y\cos x+1}\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_4 = [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{1}{2}].$$

$$I_5 = \iint_{D_5} xy\,dx\,dy \quad \text{où} \quad D_5 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x,y\geqslant 0\,;\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\} \text{ avec } a,b>0.$$

$$I_6 = \iiint_{D_6} z\,dx\,dy\,dz \quad \text{où} \quad D_6 = \{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^+)^3 \mid\ y^2+z\leqslant 1\,;\, x^2+z\leqslant 1\}.$$

Exercice 6 :
Soit $D=[0,1]^2$. Calculer

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}.$$

Exercice 7 :
Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x,y\geqslant 0\,;\, x^2+y^2-2y\geqslant 0\,;\, x^2+y^2-1\leqslant 0\}$. Calculer

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Exercice 8 :
On considère la double intégrale $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, où le domaine D est déterminé par les conditions suivantes

$$0\leqslant x\leqslant \sqrt{a^2-y^2}, \quad y\geqslant 0,$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Tracer les contours du domaine D dans le plan.
2. Trouver les bornes d'intégration :
   (i) Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à x.
   (ii) Lorsqu'on intègre d'abord par rapport à y.
   Montrer que D est un domaine quarrable.
3. Calculer l'intégrale I pour $f(x,y)=x^2+2y^2$.

Exercice 9 :
Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y \geqslant x^2 \,;\, x \geqslant y^2\}$.

1. Dessiner D. Montrer que D est un domaine quarrable.
2. Calculer l'intégrale double
$$I := \iint_D \frac{dx\,dy}{(4x + 4y + 1)^2}.$$

Exercice 10 :
Calculer
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{2x + 1}}.$$